基于Levy过程的组合信用衍生品动态定价模型*

史永东 武军伟**

（东北财经大学，应用金融研究中心和金融学院，大连，116025）

（2008/7/30 版本）

内容提要：信用衍生产品是有效分散、转移以及对冲信用风险的重要工具。2007 年，全面爆发的美国次贷危机，导致了严重的违约集聚现象，致使现有的信用衍生品定价模型面临极大的挑战，因此，如何对信用衍生品进行准确定价成为学者们研究的焦点。为了更好的描述这种现象，本文利用 Levy 过程刻画违约密度的跳跃结构，构建了一种更为一般的仿射跳跃模型。对于组合信用衍生品定价模型的数值模拟结果显示，与传统的定价模型相比，这种结构可以很好地描述违约的集聚现象。文章最后，给出了该模型的扩展方向。

关键词：组合信用衍生品；动态定价模型；仿射跳跃；Levy 过程

Dynamic Portfolio Credit Derivatives Pricing Model Based on Levy Processes

Yongdong SHI, Junwei WU

（School of Finance, Dongbei University of Finance and Economics, Dalian 116025）

Abstract: Credit derivatives are the effective tools for dispersing, transforming and hedging the credit risk. After the subprime credit crisis of 2007, credit defaults cluster seriously. In order to describe this kind of phenomenon, we use Levy processes to describe the default intensity, so that we get a more general affine-jump model. We implement our model to price the Portfolio credit derivatives, the results show that it can describe defaults clustering, at last, we give the possible ways to improve the model.

Key Words: Portfolio Credit Derivatives, Dynamic Pricing Model, Affine-Jump, Levy Processes

1 引言

随着场外衍生品市场和传统市场的迅速发展，全球信用风险市场的规模极度庞大，如何有效管理信用风险则成为金融机构面临的难题之一，信用衍生品[①]正是适应这一需求产生

* **资助项目**：国家自然科学基金“不完全市场下信用衍生品定价理论和应用研究”；教育部人文社会科学重点研究基地中国人民大学应用统计科学研究中心重大项目（06JJD910002)；辽宁省教育厅创新团队项目（2006T042）。

** 史永东(1968—)，男，汉族，黑龙江明水人，经济学博士，东北财经大学金融学院和应用金融研究中心教授，博士生导师，电子信箱：ydshi@263.net，研究方向：金融工程、行为金融和资本市场；武军伟(1978—)，男，东北财经大学金融学院和应用金融研究中心博士生，电子信箱：wujunwei1314530@163.com。

① 信用衍生品是一种用于转移信用风险的金融工具，它的其价值由一种或者一组参考资产（标的物）的信用质量决定。其参考资产可以涵盖一切具有违约风险的金融资产，比如风险债券、贷款或者更为复杂的金

的。由于信用衍生品在信用风险管理方面的突出优势，银行、保险公司和对冲基金等金融机构逐渐成为信用衍生品交易的主要参与者。在过去的 15 年间，信用衍生品成为全球发展最为迅猛的金融产品，其交易量的增加和产品创新的速度都是传统金融产品无法比拟的，截至 2007 年 12 月，全球信用衍生品市场规模为 62.2 万亿美元，同比增长 70%[②]。

信用衍生品的分类方法很多，其中根据信用衍生品参考资产的复杂程度，我们可以将信用衍生品分为两类：单名(single-name)信用衍生品和组合(portfolio)信用衍生品（多名(multi-name)信用生品）。信用衍生品发展初期以单名信用衍生品为主，比如信用违约互换(CDS)、总收益互换(TRORS)和信用关联票据(CLN)等，它们的特点都是价值与单个金融资产的信用质量相关。而近几年，信用衍生品中发展最快的是组合信用衍生品，它基于一组金融工具，而且这组金融工具的信用质量存在着某种关联性，这种关联性的存在，给组合信用衍生品的准确定价带来了极大困难，很大程度上，组合信用衍生品的定价技术就是对信用关联进行定价，这正是本文研究的对象。

组合信用衍生品种类繁多，结构复杂，但一般是通过结构化技术将简单的产品重新组合而得到的，因此，组合信用衍生品定价研究的基础是对基本组合信用衍生品进行定价。常见的基本组合信用衍生品包括第 N 个违约信用违约互换(Nth-to-default CDS)、抵押债务债券(CDOs)等，其中 CDOs 是最重要的组合信用衍生品，下面我们对 CDOs 的基本原理作简单介绍。

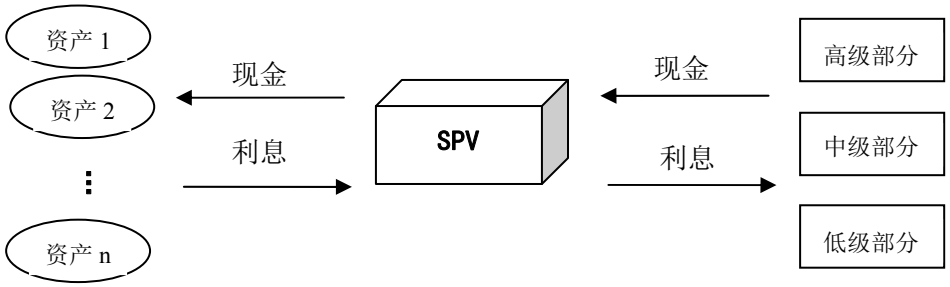

图 1　CDOs 基本结构示意图

通常，CDOs由一个被称为“特殊目的机构(SPV)”的金融实体发起，它的评级一般是3A级的，而且具有独立的法律身份。图 1 给出了一个CDOs的基本结构，CDOs的参考资产是由n种金融资产组成的一个资产组合，SPV以这个资产组合的收益现金流作为基础发行债券。为了满足不同投资者的风险偏好，SPV利用分层技术，根据违约风险的高低将发行的债券分成高、中和低几个不同的部分，级别越高，风险越低，然后参考资产的违约损失按照债券级别由低到高的顺序由相应的投资者承担对应的部分。比如如果低级部分所占比例为整个资产的 3%，则参考资产低于 3%的违约损失将全部由对应的投资者承担，当损失超过 3%时，超出的部分转移到上一级债券的投资者，依次进行下去。由于低级债券部分容易遭受损失，为了顺利发行，这部分一般由SPV自己购买。CDOs有很多不同的分类方法，比如可以按照参考资产的形成方式分为现金CDOs(cash CDOs)和合成CDOs，其中在现金CDOs中，SPV要用现金将参考资产组合买下来，得到所有权。而合成CDOs则是通过出售一个参考资产为n个可违约金融资产组合的CDS，承担相应的违约风险来获得现金流[③]。

融产品及其组合。

[②] 数据来源于国际互换及衍生品协会（International Swaps and Derivatives Association, ISDA）2007 年市场统计，http://www.isda.org/。

[③] Goodman 和 Fabozzi(2002)对 CDOs 进行了详细地介绍。

近年来组合信用衍生品中发展较快的是标准化指数组合信用衍生品，比较著名的有CDX 指数系列和 iTraxx 系列。它们的原理与普通的组合信用衍生品相似，将一定数量的公司债券以相同的权重组成一个组合作为参考资产。其优点是，由于所选公司来自于不同地域、不同行业，可以很好地反映整体的违约状况；同时由于这些公司都有一定的知名度，公司债券交易活跃，使得基于这些标准化的资产组合指数的产品交易量大，流动性较好，使得产品的信用价差具有较好的代表性。

2007 年次贷危机爆发以后，风险金融资产的违约率快速上升，而且表现出强烈的违约集聚现象。Azizpour 和 Giesecke(2008)指出，这种违约集聚想象正是违约自我反馈（self-effect 或 self-exciting）效应的体现；Crouhy 和 Turnbull(2008)认为，在次贷危机发生的诸多原因中，信用衍生品定价失效是一个重要因素，其中，以 CDOs 为代表的组合信用衍生品定价模型无法真实地反映违约集聚现象最为突出。我们认为，揭示违约集聚的一个重要方面是对突发违约事件的刻画，尤其是重大的违约事件，无一例外会导致违约集中发生。

目前，对于违约密度跳跃的刻画，现有文献都是简单的计数过程跳跃结构，其缺点是非常明显的，这种跳跃结构过于单一，在短时间内，只允许一个违约事件发生，很难准确地揭示违约集聚现象。为此，本文选取 Levy 过程作为刻画违约密度跳跃的工具，其优点是在很短时间内允许发生无限次跳跃，建立一般的组合信用衍生品动态定价模型，给出一种揭示风险资产违约集聚现象的解决思路。

本文结构安排如下：在第二部分，我们对组合信用衍生品动态定价模型和有关 Levy 过程的应用研究进行综述；第三部分给出基本模型；第四部分针对基本模型进行数值模拟，并将其具体运用于组合信用衍生品定价；最后一部分对全文进行总结，并指出今后扩展的方向。

2 文献综述

信用衍生品定价模型是信用风险定价理论最直接的应用，包括单名信用衍生品和组合信用衍生品两类定价模型。其中，单名信用衍生品定价模型一般划分为结构模型、密度模型和混合模型，这方面的国外研究已经很成熟，具体参见 Schonbucher(2003)等一些信用衍生品定价的专著；国内有关单名信用衍生品定价的研究还处于起步阶段，近年来出现了一些相关文献，基本上都是对信用衍生品定价模型的文献综述（史永东和赵永刚，2007；郝刚等，2008），或对各种已有模型进行实证比较研究（梁世栋等，2005；吴恒煜和陈金贤，2006）。

由于组合信用衍生品出现晚于单名信用衍生品，因此其定价理论的发展也相对滞后一些。目前一种简单的分类方法将组合信用衍生品的定价模型分为静态模型和动态模型。静态模型主要是指因素 Copula 模型，一般认为，Li（2000）的 Gaussian Copula 模型是因素 Copula 模型的发端，这种方法发展迅速，而且很快成为组合信用衍生品定价的一种标准方法，被实务界普遍采用。有关因素 Copula 模型的细节，参见 Burtschell 等(2008)和其他一些类似文献。虽然很多学者针对 Gaussian Copula 过于对称、尾部关联弱等不足进行改进（Demarta.和 Mcneil，2005；Kalemanova 等，2007），并取得了较好的效果。但是，从本质上来说，因素 Copula 模型指定了一种固定的关联结构，是一期模型，因此无法刻画组合信用衍生品的动态关联关系。有关组合信用衍生品的静态定价，目前国内研究较少（朱世武，2005；史永东和武军伟，2008），其中，史永东和武军伟（2008）利用 Levy Copula 通过对金融资产中的跳跃部分进行关联，进而对组合信用衍生品进行定价，对静态模型进行了扩展。

组合信用衍生品动态定价模型是在静态定价模型（即因素 Copula 模型）的基础上发展起来的，它克服了因素 Copula 模型静态结构这一缺点，通过随机过程动态描述信用组合的损失分布，更为准确、灵活地刻画了动态关联关系，成为组合信用衍生品定价的一种重要方

法，目前仍然在逐步完善过程中。

动态定价模型有两种基本的思路：即“由下往上（bottom-up）方法”和“由上往下（top-up）方法”。所谓由下往上，就是说首先对组合中的每个个体的损失过程进行刻画，然后将这些损失过程加总，得到整体组合的损失过程，这种方法的思路简单、直观，但是一个最大的困难就是整体的损失分布计算起来非常困难，所以该方法发展比较缓慢，相关文献参见 Jarrow 和 Yu(2001)、Yu(2007)等；而由上往下思路与上面的方法正好相反，直接对信用组合的整体损失分布进行刻画，克服了计算困难的局限。正如 Schonbucher(2006)指出，类似于对股价指数的刻画一样，最简单的方法应该是直接对它描述，而不是对组成指数的个股进行刻画。基于此，这种方法已经引起学术界的极大关注，而且在实务中已经逐步开始运用，本文将采用这种方法建模。

主要的由上往下的动态建模方法又分为两类：第一类是直接对损失过程进行建模，比如 Sidenius等(2006)、Schonbucher(2006)等；第二类是类似于信用风险的密度模型[④]对违约密度过程进行建模，然后由违约密度对损失过程进行描述，比如Ding(2008)等、Errais(2007)等、Giesecke和Goldberg(2008)等一些文献，国内韩丹和张效成（2007）属于这一类型。

第一类模型受 HJM-模型的启发，利用非时齐马尔可夫过程描述组合的整体损失过程，用一种所谓“前向转移率（forward transition rates）”将损失分布唯一表示出来，而且利用这个前向转移率可以直接计算合成 CDOs 的完全期限结构。这类模型的优点是可以对前向转移率矩阵进行不同的结构设定，从而既可以保证模型的灵活性，同时保证计算上容易处理。如文献 Schonbucher(2006)中，前向转移率使用了仿射跳跃的结构，使得实际运用较为方便。

第二类模型则不同，它刻画的对象是违约密度 λ，一种最广泛的结构设定假设他服从如下的仿射跳跃结构：

$$d\lambda_t = \kappa\left(c-\lambda_t\right)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dW_t + \delta L_t \qquad (2.1)$$

其中，$k \geq 0, c > 0, \sigma \geq 0, \delta > 0, \lambda_0 > 0$，$L_t$ 为损失过程，如果假设每次违约的损失率相同且都为 l，且违约的数目为 N_t，则 $L_t = lN_t$。因此，这类模型的关键问题就转化为得到违约数目 N_t 的过程。类似于一般密度模型的处理方法，根据 Doob-Meyer 定理，存在一个连续过程 A_t，使得 $M_t = N_t - A_t$ 为一个局部鞅。A_t 刻画了违约事件累积到达率，即：

$$A_t = \int_0^t \lambda_s ds \qquad (2.2)$$

而且 A_t 的分布决定了 N_t 的分布。

Giesecke(2007)受 Carr 和 Wu(2004)的启发，给出了利用 A_t 求解 N_t 的一般方法，将 N_t 的特征函数转换成 A_t 在一个等价鞅测度 P^v 下的拉普拉斯变换。即：

$$E\left[\exp\left(ivN_t\right)\right] = E^v\left[\exp(-uA_t)\right] = E^v\left[\exp(-u\int_0^t \lambda_s ds)\right]$$

其中 λ_s 具有仿射跳跃结构，Duffie 等(2000)给出了这个问题解的一般形式，为这类模型的运

[④] 有关信用风险的密度模型的文献参见 Jarrow 等(1997)和 Landed(1999)。

用提供了极大的方便。

虽然上述模型可以很方便地刻画损失分布，但其突出的一个特点是，违约密度结构中的跳跃部分是基于一个简单的计数过程 N_t，它在每一个很小的时间区间只允许产生一次跳跃，显然，这与现实情况存在很大差距，很多研究，如 Azizpour 和 Giesecke (2008)指出，违约集聚（cluster）是一个普遍存在的现象，而违约集聚的直接后果就是使得信用组合的违约密度出现剧烈波动，致使信用组合中出现大面积违约。尤其是在信用环境恶化的前提下，简单的跳跃结构无法很好的刻画违约过程，而具有一般跳跃结构的 Levy 过程则是一种很好的替代选择。

Levy 过程在刻画金融资产收益率和价格的研究中已经得到广泛应用，尤其广泛应用于期权定价模型中（Carr 和 Wu，2004），另外目前已经有很多专著对这些运用进行了总结（Cont 和 Tankov，2004；Schoutens，2003）。Levy 过程是一种可以无限分解（infinitely divisible）的过程，它具有静态独立增量，根据 Levy-Khintchine 公式，一个 Levy 过程 X_t 的特征函数具有如下形式：

$$\phi_{X_t}(\theta)=E\left[e^{i\theta X_t}\right]=e^{-t\psi_x(t)} \quad t\geq 0 \tag{2.3}$$

其中

$$\psi_x(\theta)=-i\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-e^{i\theta x}+i\theta x1_{|x|<1}\right)\gamma(dx) \tag{2.4}$$

条件（2.4）将一个 Levy 过程分成两个部分，等式右边前两项是连续部分，而第三项是跳跃部分。Carr 和 Wu(2004)对 Levy 过程的跳跃部分进行了总结，将跳跃类型分成两类：有限行为 Levy 跳跃和无限行为 Levy 跳跃，有限情况即在有限的时间内只能有限个跳跃，而无限情况是，在任何有限时间区间上都可产生无限个跳跃。

利用这种复杂跳跃结构，我们显然可以描述更为复杂和接近现实情况的变量过程，尤其是剧烈波动情形。本文正是基于这种思路，对于具有一般的 Levy 跳跃结构的违约密度进行建模，即保留了仿射跳跃模型的易处理性，同时采用了 Levy 过程复杂的跳跃结构，得到具有更为一般跳跃结构的组合信用衍生品的动态定价模型。

3 一般模型

本部分我们给出一般模型，在下一部分将对其进行模拟和具体应用。

对于组合信用资产的违约密度 λ_t，我们考虑如下结构：

$$d\lambda_t=d\lambda_t^{(1)}+d\lambda_t^{(2)} \tag{3.1}$$

其中 $\lambda_t^{(1)},\lambda_t^{(2)}$ 为相互独立的随机过程，满足

$$d\lambda_t^{(1)}=\left(a-b\lambda_t^{(1)}\right)dt+\sqrt{2c\lambda_t^{(1)}}dW_t \quad \lambda_0^{(1)}=\zeta_1 \tag{3.2}$$

$$d\lambda_t^{(2)}=-\rho\lambda_t^{(2)}dt+\sum_{i=1}^{m}\delta_t^i dJ_t^i \quad \lambda_0^{(2)}=\zeta_2, \tag{3.3}$$

这里，a,b,c,ρ为常数，W_t为标准维纳过程，$J_i, i=1\cdots m$为纯跳跃Levy过程[5]，且相互独立。很容易看出$\lambda_t^{(1)},\lambda_t^{(2)}$分别为CRI均值回复（mean reverting）扩散过程和均值回复纯跳跃Levy过程，由于过程$\lambda_t^{(1)}$是一个完全连续的过程，因此，λ_t是由一个纯连续过程和一个纯跳跃过程两部分组成的。由于$\lambda_t^{(2)}$的均值回复特征，保证它不会无限变大。δ_t^i表示违约密度对跳跃过程的敏感程度，它也是一个刻画违约集聚的参数，为了考虑问题的方便，我们假设它为常数，即$\delta_t^i=\delta_i$。

由式（2.2）可知：

$$A_t=\int_0^t\lambda_s ds=\int_0^t\left(\lambda_s^{(1)}+\lambda_s^{(2)}\right)ds=\int_0^t\lambda_s^{(1)}ds+\int_0^t\lambda_s^{(2)}ds\triangleq A_t^{(1)}+A_t^{(2)} \quad (3.4)$$

为了求解N_t的特征函数$E\left(e^{ivN_t}\right)$，我们给出如下定理：

定理 2.1 假设N_t表示截止到t时刻信用组合中的违约数目，且$N_0=0$，则N_t的特征函数可表示为：

$$\psi(v)=E\left[e^{ivN_t}\right]=E^v\left[e^{-uA_t}\right] \quad (3.5)$$

其中A_t定义如（2.2），$u=1-\exp(iv)$，E^v表示在等价测度P^v下的数学期望，而且$dP^v\triangleq Z_t(v)dP=\exp\left(ivN_t+(1-\exp(iv))A_t\right)dP$。

证明：见附录。 □

根据定理 2.1，违约数目N_t的特征函数可以转换为一个新测度P^v下A_t的拉普拉斯变换，而在新测度下对于原来过程的连续部分和跳跃部分，我们有下面的结论：

定理 2.2 假设P^v的定义如前所述，则在原测度P下连续的部分A_t不变，在原测度P下跳跃的部分：$A_t^v=\left(1-\left(1-e^{iv}\right)\right)A_t=e^{iv}A_t$。 □

证明：见附录。

根据定理 2.2 和定理 2.2，以及独立随机变量数学期望的性质，我们有

$$\begin{aligned}E\left[e^{ivN_t}\right]&=E^v\left[e^{-uA_t}\right]=E^v\left[e^{-u\left(A_t^{(1)}+A_t^{(2)}\right)}\right]=E^v\left[e^{-uA_t^{(1)}}\right]E^v\left[e^{-uA_2^{(2)}}\right]\\&=E\left[e^{-uA_t^{(1)}}\right]E^v\left[e^{-uA_2^{(2)}}\right]\\&=E\left[\exp\left(-u\int_0^t\lambda_s^{(1)}ds\right)\right]E^v\left[\exp\left(-u\int_0^t\lambda_s^{(2)}ds\right)\right] \quad (3.6)\end{aligned}$$

[5] 即该 Levy 过程中不存在连续部分。

由于（3.6）中 $\lambda_t^{(1)}$ 和 $\lambda_t^{(2)}$ 都具有仿射结构，因此上边两个乘积项就转化为 Duffie 等(2000)的求解问题。我们以如下定理的形式给出求解结果：

定理 2.3 假设 $\lambda_t^{(1)}$ 和 $\lambda_t^{(2)}$ 如（3.2）和（3.3）的定义，则我们有如下结论：

$$E\left[\exp\left(-u\int_0^t \lambda_s^{(1)} ds\right)\right] = \exp\left(\alpha_1(t) + \beta_1(t)\lambda_0^{(1)}\right)$$

$$E^v\left[\exp\left(-u\int_0^t \lambda_s^{(2)} ds\right)\right] = \exp\left(\alpha_2(t) + \beta_2(t)\lambda_0^{(2)}\right)$$

其中 $\alpha_1(t), \beta_1(t), \alpha_2(t), \beta_2(t)$ 满足如下常微分方程：

$$\begin{cases} \partial_t \beta_1(t) &= b\beta_1(t) - c\beta_1^2(t) + u \\ \partial_t \alpha_1(t) &= -a\beta_1(t) \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \partial_t \beta_2(t) &= \rho\beta_2(t) - e^{iv}\left(\sum_{i=1}^m \theta_i\left(\delta_i\left(\beta_2(t)\right)\right) - 1\right) + u \\ \partial_t \alpha_2(t) &= 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

两方程满足条件 $\alpha_1(T) = 0, \beta_1(T) = 0$， $\alpha_2(T) = 0, \beta_2(T) = 0$，且 $u = 1 - \exp(iv)$，$\theta_i(c) = \int_0^{+\infty} e^{cz}\gamma_i(dz)$ 决定了第 i 种跳跃的大小。

证明：这个结论只是 Duffie 等(2000)的一种特殊形式，只要注意到在新测度 P^v 下的变化以及将仿射结构按照本文设定作相应的调整既可。 □

由于常微分方程（3.7-3.8）只有在一些特定形式下才可以求出显式解，因此一般采用数值方法，比如龙格-库塔方法求解，而且速度很快。

定理 2.3 最终解决了本文模型的求解问题，因为只要得到 N_t 的特征函数，我们就可以通过 Levy 逆变换求解它的概率分布或者在 $\psi'(v)\big|_{v=0}$ 存在的条件下用如下常用公式求解数学期望：

$$E(N_t) = -i\psi'(v)\big|_{v=0} \tag{3.9}$$

4 基本模型在组合信用衍生品定价中的应用

本部分在上部分一般模型的基础上，针对一些具体的参数设定，给出数值解，并且将模型具体应用于求解组合信用衍生品指数互换和 CDOs 定价中，进而分析各参数对具体结果的影响，其中，两种产品的定价公式我们参照了 Errais 等(2007)。

4.1 组合信用衍生品定价公式

组合信用衍生品指数互换（Index Swap）类似于一个标准的 CDS 互换，但不同的是其参考资产是一组金融资产而不是单一资产。我们假设资产组合的名义价值总和为 1，资产组合中一共含有 n 项资产，且各项资产的名义价值相同，即都为 $1/n$。我们考虑互换的到期日为 T，则根据无套利条件，在任意时刻 $t \le T$，指数互换的投资者既违约保护的出售者获得收益 P_t 与其因违约导致的损失 D_t 应该相等，否则将会出现套利机会。

为了考虑问题方便，我们假设 L_t 为损失过程，违约的数目为 N_t，且每次违约的损失率相同且都为 l，且 $dL_t = ldN_t$，则

$$D_t = E\left[\int_0^T e^{-rs} dL_s\right] \qquad (4.1)$$

由分部积分公式可得

$$\begin{aligned} D_t &= e^{-rT}E\left(L_T\right) + r\int_0^T e^{-rs}E\left(L_s\right)ds \\ &= le^{-rT}E\left(N_T\right) + rl\int_0^T e^{-rs}E\left(N_s\right)ds \end{aligned} \qquad (4.2)$$

由于投资者获得支付是以资产组合中剩余的没有违约的部分为基础计算的，因此在 t 时刻组合的名义价值为

$$I_t = \max\left(\left(1-\frac{N_t}{n}\right),0\right) \equiv \left(1-\frac{N_t}{n}\right)^+ \qquad (4.3)$$

我们假设投资者获得支付的年率为 S，一年支付频率为 $1/\alpha_m$，α_m 为常数，支付日期为 $t_m \le T$，在近似的情况下[⑥]，我们得到 P_t 的形式为

$$\begin{aligned} P_t &= E\left[\sum_{t_m} e^{-rt_m} S\alpha_m I_{t_m}\right] \\ &= S\sum_{t_m} e^{-rt_m} S\alpha_m \left(1-\frac{1}{n}E\left[N_{t_m}\right]\right)^+ \end{aligned} \qquad (4.4)$$

由 $P_t = D_t$ 可得：

$$S = \frac{le^{-rT}E\left[N_T\right] + rl\int_t^T e^{-rs}E\left[N_t\right]ds}{\sum_{t_m} e^{-rt_m}\alpha_m\left(1-\frac{1}{n}E\left[N_{t_m}\right]\right)^+} \qquad (4.5)$$

[⑥] 理论上，违约保护的购买者在支付时间区间 $\left[t_m, t_{m+1}\right]$ 上的利息时，对于本时间段发生的违约事件对应的资产部分，应当支付 t_m 到违约时间的累计利息，本文为了方便，不考虑这一部分。CDOs 的定价公式中，我们做了类似的假定。理论上，这一部分影响不会很大。

下面我们考虑 CDOs 每一部分债券（tanch）的定价公式，我们对参考资产组合做组合指数互换一样的一些假设，则对于某一部分债券，我们假设它承担的损失区间为$\left[\underline{K},\bar{K}\right]$，其中$0\le\underline{K}<\bar{K}\le 1$，记$K=\bar{K}-\underline{K}$。如果假设该部分对效用的损失为$U_t$，则：

$$U_t=\left(L_t-\underline{K}\right)^+-\left(L_t-\bar{K}\right)^+ \tag{4.6}$$

其中L_t为整体组合的损失，则对应的D_t为

$$D_t=e^{-rT}E\left(U_T\right)+r\int_0^T e^{-rs}E\left(U_s\right)ds \tag{4.7}$$

在 CDOs 中，每一部分债券投资者获得支付有两部分，一部分是一个固定支付FK，另外一部分就是与参考资产t时刻组合的名义价值I_t对应的部分，其中

$$I_t=\left(K-U_t\right)^+ \tag{4.8}$$

类似的，我们有

$$\begin{aligned}P_t&=FK+E\left[\sum_{t_m}e^{-rt_m}S\alpha_m I_{t_m}\right]\\&=FK+S\sum_{t_m}e^{-rt_m}\alpha_m\left(K-E\left[U_{t_m}\right]\right)^+\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$S=\frac{e^{-rT}E\left(U_T\right)+r\int_0^T e^{-rs}E\left(U_s\right)ds-FK}{S\sum_{t_m}e^{-rt_m}\alpha_m\left(K-E\left[U_{t_m}\right]\right)^+} \tag{4.10}$$

显然，上面公式中除了$E\left[N_t\right]$，其他参数可是可以设定的，而$E\left[N_t\right]$的求解问题我们已经在上一部分解决，下面我们给出在一些参数假定下的数值结果。

4.2 数值模拟

为了模拟方便，我们首先对违约密度中的跳跃部分作一些简化，假定只有一个纯 Levy 跳跃过程，即$m=1$，另外，为了避免数值积分，得到$\theta\left(\delta\left(\beta_2(t)\right)\right)$的显性形式，我们假定$\gamma\left(dz\right)=\tau e^{-\tau z}dz$，且满足积分存在的条件，本文选取$\tau=\frac{4}{7}$。

在上述假定下，我们对参数$a,b,c,\rho,r,l,\delta,\lambda_0^{(1)},\lambda_0^{(2)}$进行不同设定，观察结果变化，其中，对于常微分方程（3.7-3.8），我们采用龙格-库塔数值方法进行计算；（4.2）、（3.7）中的积分采用最简单的组合梯形数值积分方法计算；对于（3.9），采用在一个包含 0 的对称区间$\left[-a,a\right]$上计算特征函数 10 个不同值的平均数，直至该值收敛为止。

4.2.1 自我反馈（self-effect）效应分析

所谓自我反馈，就是指当信用组合中某一个时间点违约上升时，往往接下来的时间段内倾向于继续违约这种上升态势，即违约具有某种惯性，因此，该现象会使违约具有集聚性，在我们的模型中，δ 是描述自我反馈效应的一个重要参数。从图 2 中很明显的可以看出，在其他参数不变的条件下，组合资产的违约数是 δ 的增函数，且当 $\delta=1$ 时，平均违约数目急剧增加，说明我们的模型对 δ 是敏感的，因此我们的模型可以很好地对自我反馈效应和违约集聚现象进行描述。为了进行对比，我们在图 3 中给出了简单计数过程跳跃结构的 δ 敏感性分析，在相同的参数设置下，很明显可以看出平均违约数目对 δ 的敏感度很差，各参数间的变化不是很明显。这就意味着使用这种跳跃结构，跳跃对模型的影响不明显，因此，很难通过这种简单跳跃刻画违约的集聚现象，从而在定价中体现出来，我们在后面的具体模拟中也可以看出这种缺陷。

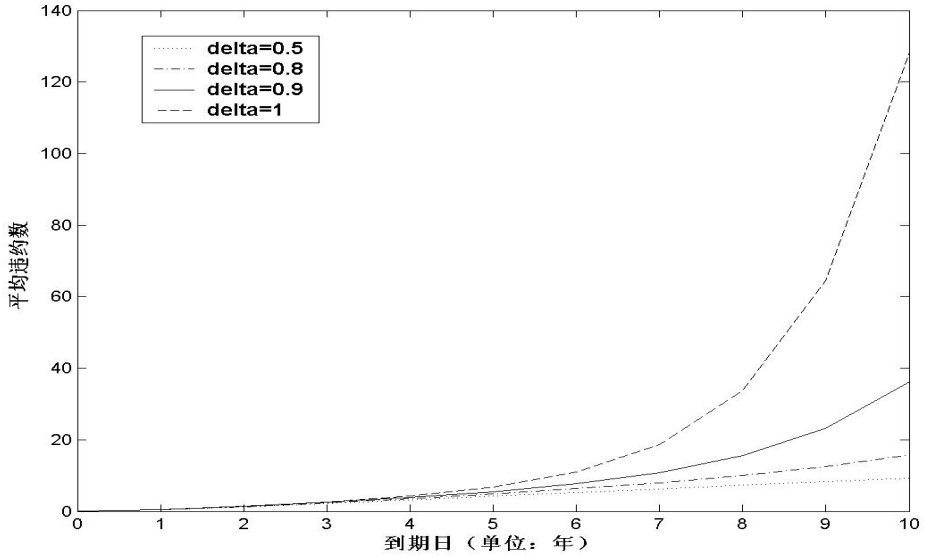

图 2 平均违约数对 δ 的敏感度分析

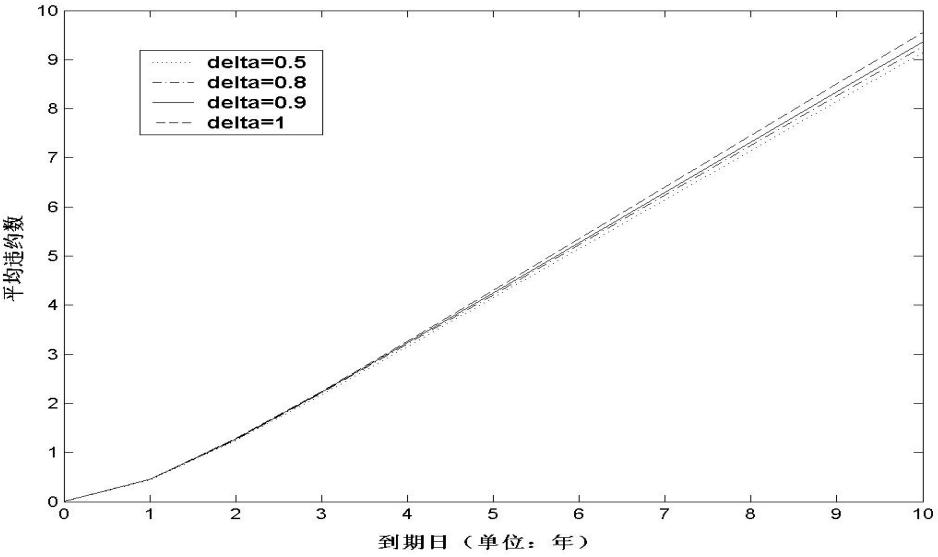

图 3 简单跳跃情况下平均违约数 δ 的敏感度分析

4.2.2 信用组合指数互换价差期限结构分析

我们对选取的参数作一些基本设置，假设组合中资产数目为$n=125$，违约损失率为$l=0.4$，即违约回收率为0.6，利率为固定利率，且$r=0.05$，从图4的结果可以看出，指数互换的收益是δ的增函数，曲线的形状与图2的规律相似。限于篇幅，在这里我们给出价差相对于其他参数的图形，其中一些基本的规律是：在其他变量不便的前提下，价差是a，c，d，δ，$\lambda_0^{(1)}$，$\lambda_0^{(2)}$的增函数，是b，ρ的反函数。另外，在一般跳跃结构情况下，我们可以得到的图形类似于图3，信用组合指数互换价差期限结构对δ不敏感，限于篇幅，这里没有给出具体的图形。

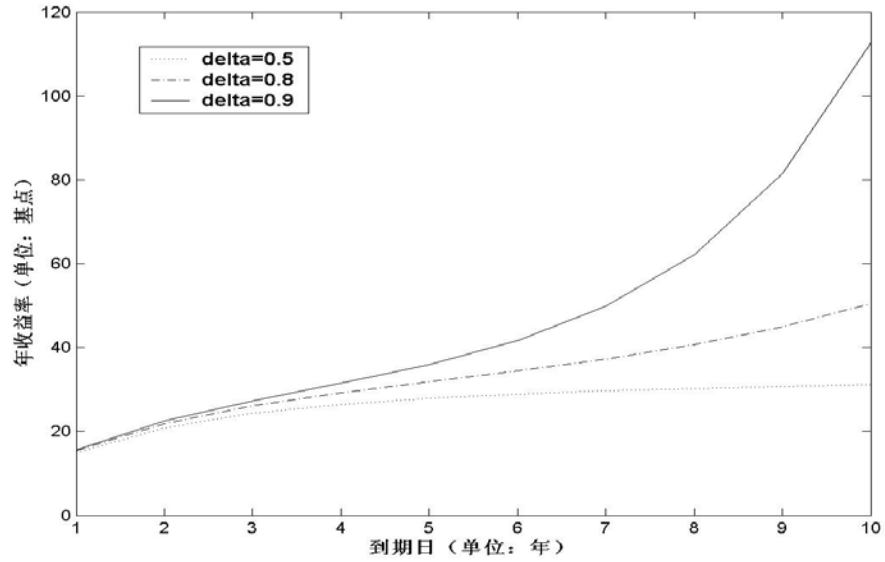

图4 其他条件不变时，指数互换价差的期限结构
（本图中，我们选取$a=b=\rho=1$，$c=0.4$，$\lambda_0^{(1)}=\lambda_0^{(2)}=0.05$）

4.2.3 CDOs 每一债券部分期限结构分析

除了上文的基本参数假设外，我们还假定$F=0$，$\alpha_m=1$，在图5至图8中，我们设置$a=b=\rho=1$，$c=0.4,\lambda_0^{(1)}=\lambda_0^{(2)}=0.1$，从图形上，可以得出与指数互换一样的规律，但遗憾的是，由于我们无法获取真实的市场交易数据，因此，无法对模型中的参数进行估计，进而找到可以很好拟合市场数据的参数取值。模拟结果显示，对于高级别部分债券，比如[30%，100%]部分，在相同的参数设置下，一般跳跃结构模型的收益为0，但在本文跳跃结构情况下，图8显示仍然有较高的信用风险补偿，充分说明跳跃结构设置导致了很强的违约集聚现象，可以很明显的影响到评级较高的债券。违约集聚现象是一种在整体信用环境恶化情况下普遍存在的现象，由于某些关联关系的存在，违约会很容易“传染”到信用组合中评级较高的债券，对信用组合的定价产生很大影响，而本文模型可以很好地刻画这种情况。

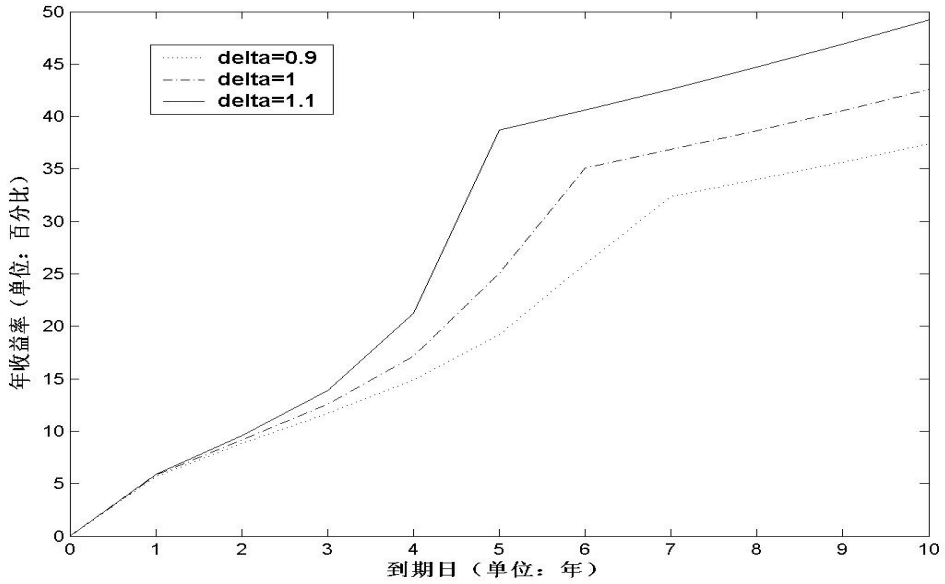

图 5 $[0,3\%]$部分期限结构

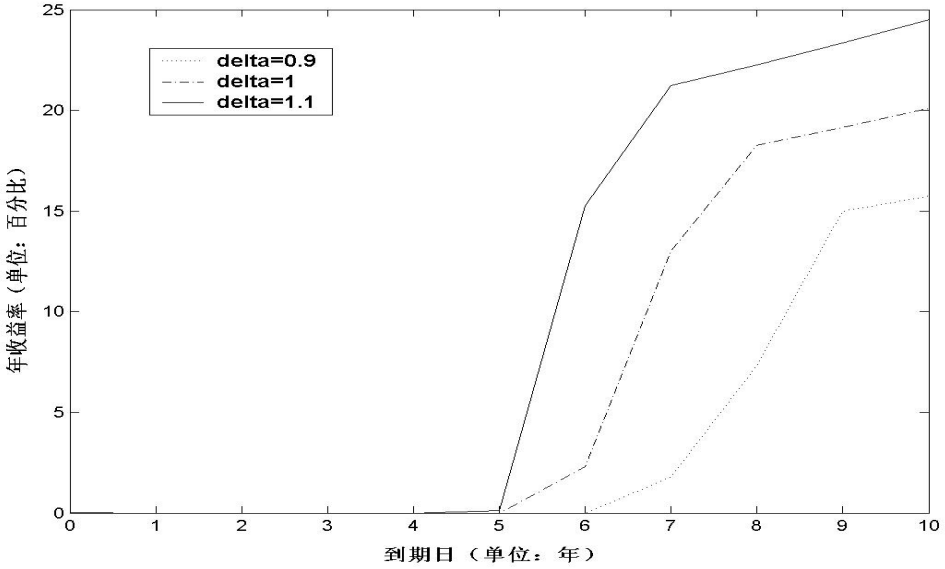

图 6 $[3\%,7\%]$部分期限结构

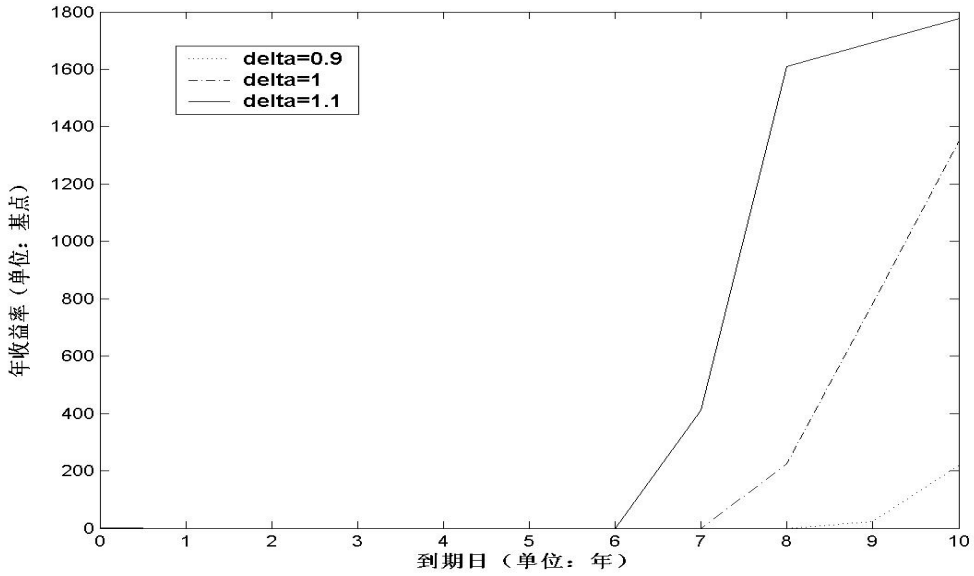

图 7 $[7\%,30\%]$部分期限结构

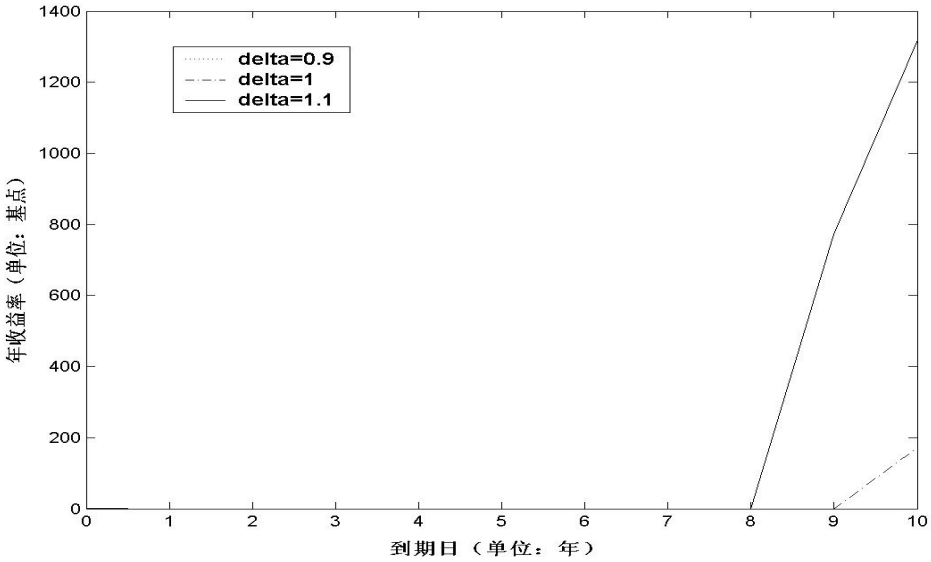

图 8 $[30\%,100\%]$部分期限结构

5 结论与启示

大量的实证研究表明，信用组合中违约事件的自我反馈效应导致严重的违约集聚现象，而在信用衍生品密度定价模型中，使用连续类型或者简单计数跳跃类型的违约密度很难以真实地刻画这种剧烈的集聚现象，因此本文选取更为一般的 Levy 跳跃过程作为描述违约密度的跳跃结构。结果显示，当敏感系数$\delta>1$后，随着δ的增大，平均违约数目急剧增加，而且这种集聚现象能很好地反映在信用组合指数互换和 CDOs 每一债券部分的期限结构中。另

外，我们通过数据模拟对每一个参数的影响进行了具体分析，为模型的市场数据拟合奠定了基础。

当然，为了方便需要，我们在数据模拟过程中将模型做很多简化的假定，对数据模拟的精度会有一定的影响，但这并不影响模型的分析能力，相应的应用中，只要我们把具体的参数按照现实的需要进行更为详细地设定即可。

除此之外，本文的模型还有很多需要改进的地方，我们给出如下考虑：

（1）违约回收率是影响信用衍生品定价的一个重要因素，在不同的回收率假定下结果会有一定的差异，比如 Duffie 和 Singleton(1999)对几种不同的回收率进行了研究。本文假定回收率是一个常数$1-l$，这与现实情况有一定的差距。一种比较合理的假设是，回收率为动态的，而且与当时的信用环境相关，已有的统计数据表明，它们之间存在一定的负相关关系。

（2）我们模型中利率是固定的，这种假定是很简化的，可以将利率扩展到一个很一般的情况，比如利率本身服从一个仿射跳跃结构，在这种框架下，模型仍然是易于处理的，但无疑复杂度大大增加。

（3）违约密度时变性扩展。与 Ding 等(2008)类似，可以考虑将违约密度与一个时变过程相关联，其好处是，违约密度变得更为灵活，更能够动态的反应信用组合的违约状况。

（4）随机波动率扩展。随机波动率模型是基本期权定价模型扩展的一个重要方向（Heston，1993）。类似的，在我们的模型中，同样可以考虑违约密度的随机波动率模型。比如，我们可以将刻画$\lambda_t^{(1)}$波动率的参数c设定为一个随机过程，这样会得到一个非常数的违约密度波动率，使违约密度结构具有一般化的形式。

以上几点是我们今后进一步工作的设想，由于违约密度结构是建立信用衍生品定价模型的关键，而更为准确刻画真实情况依赖于人们对违约现象认识的不断深入，次贷危机的爆发给我们提供了良好的素材，因此深入研究次贷危机爆发的根源和危机爆发的影响，也是未来我们需要做的工作。

附录：

本文仅给出大体的证明过程，详细证明细节请读者参阅详细证明参见 Giesecke(2007)。

定理 2.1 证明:

由于 p 和 p^v 为等价鞅测度，$dp^v = Z_t(v)\,dp$。若随机变量 X 满足$\left|XZ_t(v)\right|$在 p 下是可积的，则在 p^v 下：

$$E^v(X) = E\left(XZ_t(v)\right)$$

故对于违约数目的计数过程 N_t：

$$E\left(e^{ivN_t}\right) = E\left(e^{-uA_t}\cdot e^{ivN_t+uA_t}\right)$$

$$= E\left(Z_t e^{-uA_t}\right)$$

$$= E^v\left(e^{-uA_t}\right)$$

定理 2.2 证明：

若V_t表示在p测度下的局部鞅，$\langle V_t, N_t \rangle$表示在p下V_t与N_t的协方差，则下式定义了一个在p^v下的局部鞅：

$$V_t + u\langle V_t, N_t \rangle$$

如果V_t不存在与N_t相关的跳跃部分，则$\langle V_t, N_t \rangle = 0$，故对于连续的过程，其本身在$p^v$就为局部鞅，对应的$A_t$不变。对于违约密度中的跳跃部分$J_t$，由于$N_t$中的跳跃完全由它产生，所以二者完全关联。令$W_t = J_t - A_t$，$\langle W_t, N_t \rangle = A_t$，则在新的测度$p^v$下：

$$\begin{aligned} W_t + u\langle W_t, N_t \rangle &= J_t - A_t + uA_t \\ &= J_t - (1-u)A_t \\ &= J_t - e^{iv}A_t \end{aligned}$$

所以，跳跃部分对应的A_t变为$e^{iv}A_t$。

参考文献：

Azizpour, S. and Giesecke, K. “Self-Exciting Corporate Default”, Standford University working paper, 2008.

Burtschell, X. Gregory, J. and Laurent, J. P. “A Comparative Analysis of CDO Pricing Models”, working paper, 2008.

Carr, P. and Wu, L. “Time-changed Levy Processes and Option Pricing”, *Journal of Financial Economics*, 2004, 71, pp113-141.

Cont, R. and Tankov, P. “Financial Modelling with Jump Processes”, Champman & Hall/CRC, 2004.

Crouhy, M. and Turnbull, S. M. “The Subprime Credit Crisis 0f 07.” Nauxis, working paper, 2008.

Demarta, S. and Mcneil, A. J. “The t Copula and Related Copulas.”, *International Statistical Review*, 2005, Vol.73, No.1, pp111-129.

Ding, X. W. Giesecke, K. and Tomecek, P. I. “Time-Changed Birth Processes and Multi-Name Credit Derivatives.”, Standford University, working paper, 2008.

Duffie, D. “Credit Risk Modeling with Affine Processes.” *Journal of Banking and Finance*, 2005, Vol.73. No. pp2751-2802.

Duffie, D. and Singleton K. “Modeling Term Structures of Defaultable Bonds.” *The Review of Financial Studies*, 1999, Vol.12. No.4., pp687-720.

Duffie, D. Pan, J. and Singleton, K. “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions.” *Econometrica*, 2000, Vol.68. No.6., pp1343-1376.

Errais, E. Giesecke, K. and Goldberg L.R. “Pricing Credit From the Top Down with Affine

Point Processes.", Standford University, working paper, 2007.

Giesecke, K. "Portfolio Credit Risk:Top Down vs. Bottom Up Approaches.", Standford University, working paper, 2008.

Giesecke, K. "The Correlation-neutral Measure for Portfolio Credit.", Standford University,working paper,2007.

Giesecke, K. and Goldberg L.R. "A Top-Down Approach to Multi-Name Credit.", Standford University, working paper, 2008.

Goodman L.S. and Fabozzi,F. "Collateralized Debt Obligations: Structures and Analysis.", John Wiley & Son Ltd., 2002.

Heston, S. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options." *The Review of Financial Studies*, 1993, Vol.6. No.2., pp327-343.

Jarrow, R. and Yu, F. "Counterparty Risk and the Pricing of Defaultable Seurities." *The Journal of Finance*, 2001, Vol.56, No.5., pp1765-1799.

Jarrow, R. Landed. and Turnbull, S. "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads.", *The Review of Financial Studies*,1997, Vol.10. No.2., pp481-523.

Kalemanova, A. Schmid, B. and Werner, R. "The Normal Inverse Gaussian Distribution for Synthetic." ,*Journal of Derivatives*, 2007, pp80-93.

Landed. "On Cox Processes and Credit Risky Securities." *Review of Derivatives Research*, 1998, 2, pp99-120.

Schonbucher, P. "Credit Derivatives Pricing Models", John Wiley & Son Ltd., 2003.

Schonbucher, P. "Portfolio Losses and the Term Structure of Loss Transition Rates: A New Methodology for the Pricing of Portfolio Credit.", ETH Zurich, working paper, 2006.

Schoutens, W. "Levy processes in Finance: Pricing Financial Derivatives.", John Wiley & Son Ltd.,2003.

Sidenius, J. Piterbarg, V. and Andersen, L. "A New Framework for Dynamic Credit Portfolio Loss Modelling.", working paper, 2006.

Yu, F. "Correlated Defaults in Intensity Based Models.", Mathematical Finance, 2007, 17, pp155-173.

韩丹，张效成. 《基于 Affine 强度的一般 Poisson 损失动态模型》.《天津理工大学学报》, 2007, 第 23 卷第 6 期, pp75-78.

郝刚, 张维, 熊熊. 《信用衍生品定价及潜在风险研究综述》.《西南交通大学学报(社会科学版)》, 2008, 第 9 卷第 1 期, pp6-12.

梁世栋，郭允，方兆本. 《随机违约强度下的信用风险期限结构研究》.《管理科学学报》, 2005, 第 8 卷第 4 期, pp74-79.

史永东, 武军伟. 《基于 Levy Copula 的组合信用衍生品定价模型》, 东北财经大学应用金融研究中心, 工作论文, 2008.

史永东，赵永刚. 《信用衍生产品定价理论文献综述》.《世界经济》，2007，第 30 卷第 11 期，pp80-96.

吴恒煜, 陈金贤. 《基于价格均值回复与随机波动率的信用差价衍生产品定价》.《经济

数学》, 2006, 第 23 卷第 3 期, pp267-273.

赵永刚, 史永东.《信用衍生品定价的综合模型——基于美国次级债危机背景下的研究》, 中国国际金融年会, 会议论文, 2008.

朱世武. 《基于 Copula 函数度量违约相关性》.《统计研究》，2005，第 4 期, pp61-64.